

ẢNH HƯỞNG CỦA THAM SỐ KÍCH THƯỚC LÊN HỆ SỐ ĐỘNG HỌC CỦA DẦM MICRO CHỊU KHỐI LƯỢNG DI ĐỘNG

Vũ Thị An Ninh¹, Nguyễn Đình Kiên²

¹Trường Đại học Giao thông Vận tải, email: vuthianninh@utc.edu.vn

²Viện Cơ học - VAST

1. GIỚI THIỆU

Ngày nay, với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, kết cấu với kích thước micro đã được mở rộng nghiên cứu. Ứng xử động học của dầm micro không thể giải thích dựa trên các lý thuyết cơ học cổ điển, để khắc phục những hạn chế này, lý thuyết ứng suất cặp được đề xuất trong [1] đã được sử dụng. Đối với bài toán dầm micro chịu tác dụng của tải trọng/khối lượng di động, sự phụ thuộc của các đáp ứng động lực học vào tham số kích thước của dầm cần được nghiên cứu. Bài báo này nghiên cứu ảnh hưởng của tham số kích thước lên hệ số động lực học của dầm micro chịu khối lượng di động. Các biểu thức năng lượng của dầm micro được xây dựng dựa trên lý thuyết ứng suất cặp kết hợp với lý thuyết dầm biến dạng trượt bậc ba. Phương trình chuyển động rời rạc của dầm được thiết lập dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn và được giải bằng tích phân trực tiếp Newmark. Độ chính xác của phương pháp đưa ra, sự hội tụ của phần tử dầm và các kết quả đưa ra được khảo sát chi tiết.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Phương pháp nghiên cứu sử dụng trong bài báo này là phương pháp phần tử hữu hạn. Ta xét dầm micro tựa giản đơn với mặt cắt ngang là hình chữ nhật chịu khối lượng di động m . Giả sử rằng khối lượng m di chuyển từ đầu trái tới đầu phải của dầm với vận tốc v không đổi, và trong quá trình di chuyển luôn tiếp xúc với dầm. Hệ trục tọa độ Oxyz được

chọn sao cho mặt phẳng Oxy nằm trong mặt phẳng giữa dầm và trục z vuông góc với mặt phẳng giữa và hướng lên trên.

Theo lý thuyết dầm biến dạng trượt bậc ba, các chuyển vị dọc trục $u_x(x,z,t)$ và chuyển vị ngang $u_z(x,z,t)$ tại một điểm trong dầm được cho bởi công thức sau:

$$\begin{aligned} u_x(x,z,t) &= u(x,t) - zw_{b,x}(x,t) - f(z)w_{s,x}(x,t), \\ u_z(x,z,t) &= w_b(x,t) + w_s(x,t) \end{aligned} \quad (1)$$

với $f(z) = \frac{4z^3}{3h^2}$. Dựa trên lý thuyết ứng suất cặp được đề xuất bởi Yang và cộng sự [1], năng lượng biến dạng của dầm micro được cho như sau:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}) dV, \quad i, j = x, y, z \quad (2)$$

với V là thể tích của dầm; σ_{ij} , ε_{ij} , m_{ij} và χ_{ij} lần lượt là các thành phần của ten-xơ ứng suất, ten-xơ biến dạng, độ lệch của ten-xơ ứng suất cặp và ten-xơ độ cong đối xứng. Chúng được xác định như sau:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2l^2 G \chi_{ij}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i})$$

trong đó: l là tham số kích thước; λ và G là các hằng số Lamé, và được tính theo mô đun đàn hồi E và hệ số Poisson ν ; θ_i là các thành phần của véc-tơ quay và nó được cho bởi:

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (4)$$

với e_{ijk} là hệ Levi-Civita, cho phép xác định dấu trong các hoán vị khi phân tích ten-xơ.

Áp dụng các phương trình (1), (3) và (4), biểu thức năng lượng (2) được viết lại:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + 2m_{xy} \chi_{xy} + 2m_{yz} \chi_{yz}) dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L (A_{11} u_{,x}^2 - 2A_{12} u_{,x} w_{b,xx} + A_{22} w_{b,xx}^2 - 2A_{13} u_{,x} w_{s,xx}$$

$$+ 2A_{23} w_{b,xx} w_{s,xx} + A_{33} w_{s,xx}^2 + 2B_{11} w_{b,xx}^2$$

$$+ 2B_{12} w_{b,xx} w_{s,xx} + B_{22} w_{s,xx}^2 + D_{11} w_{s,x}^2) dx \quad (5)$$

trong đó: L và A lần lượt là chiều dài và diện tích mặt cắt ngang của dầm.

Động năng T của dầm micro được xác định:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_z^2) dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_{11} [\dot{u}^2 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)^2] - 2\dot{u} (I_{12} \dot{w}_{b,x}$$

$$+ I_{13} \dot{w}_{s,x}) + I_{22} \dot{w}_{b,x}^2 + 2I_{23} \dot{w}_{b,x} \dot{w}_{s,x} + I_{33} \dot{w}_{s,x}^2 \right\} dx$$

các độ cứng của dầm trong (5) và mô-men khối lượng trong (6) là các hàm của hệ số Lamé

Thế năng do khối lượng di động sinh ra được cho bởi:

$$V_m = - \int_0^L \left[\begin{pmatrix} mg - m\ddot{u}_z - 2m\nu \dot{u}_{z,x} \\ -m\nu^2 u_{z,xx} \\ -m\dot{u} u(x,t) \end{pmatrix} u_z(x,t) \right] \delta(x_m - vt) dx \quad (7)$$

trong đó: g là gia tốc trọng trường; $m\ddot{u}_z$ và $m\dot{u}_z$ lần lượt là lực quán tính dọc trục và ngang; $2m\nu \dot{u}_{z,x}$ và $m\nu^2 u_{z,xx}$ là lực Coriolis và lực li tâm; $\delta(\cdot)$ là hàm delta Dirac.

Theo phương pháp phần tử hữu hạn ta chia dầm thành ne phần tử dầm hai nút với độ dài l_e . Véc tơ chuyển vị nút phần tử \mathbf{d} với 10 bậc tự do được viết dưới dạng:

$$\mathbf{d}_{10 \times 1} = \{ \mathbf{d}_u \quad \mathbf{d}_{w_b} \quad \mathbf{d}_{w_s} \}^T \quad (8)$$

với:

$$\mathbf{d}_u = \{ u_1 \quad u_2 \}^T,$$

$$\mathbf{d}_{w_b} = \{ w_{b1} \quad w_{b1,x} \quad w_{b2} \quad w_{b2,x} \}^T,$$

$$\mathbf{d}_{w_s} = \{ w_{s1} \quad w_{s1,x} \quad w_{s2} \quad w_{s2,x} \}^T \quad (9)$$

Các chuyển vị dọc trục và ngang được nội suy theo các giá trị nút của chúng như sau

$$u = \mathbf{N} \mathbf{d}_u, \quad w_b = \mathbf{H} \mathbf{d}_{w_b}, \quad w_s = \mathbf{H} \mathbf{d}_{w_s} \quad (10)$$

trong đó $\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2]$, $\mathbf{H} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4]$ với N_1 và N_2 là các đa thức Lagrange, và H_1, H_2, H_3, H_4 là các đa thức Hermite.

Sử dụng các phép nội suy ở trên, biểu thức (5) được viết dưới dạng:

$$U = \frac{1}{2} \sum^{ne} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d} \quad (11)$$

với \mathbf{k}_e là ma trận độ cứng phần tử của dầm và được viết dưới dạng các ma trận con như sau:

$$\mathbf{k}_e = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab} & \mathbf{k}_{as} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{k}_{ab} \\ \mathbf{k}_{as} \end{matrix}^T & \begin{matrix} \mathbf{k}_{bb} & \mathbf{k}_{bs} \\ \mathbf{k}_{bs}^T & \mathbf{k}_{ss} \end{matrix} \end{matrix} \quad (12)$$

Tương tự, động năng trong phương trình (6) cũng được viết lại như

$$T = \frac{1}{2} \sum^{ne} \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{d}} \quad (13)$$

trong đó ma trận khối lượng phần tử của dầm \mathbf{m}_e được viết dưới dạng các ma trận con

$$\mathbf{m}_e = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{m}_{aa} & \mathbf{m}_{ab} & \mathbf{m}_{as} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{m}_{ab} \\ \mathbf{m}_{as} \end{matrix}^T & \begin{matrix} \mathbf{m}_{bb} & \mathbf{m}_{bs} \\ \mathbf{m}_{bs}^T & \mathbf{m}_{ss} \end{matrix} \end{matrix} \quad (14)$$

các ma trận con trong các phương trình (12) và (14) được tính qua các véc-tơ hàm dạng và các hệ số độ cứng và mô-men khối lượng, tương ứng.

Thế năng trong (7) được viết lại dưới dạng sau:

$$V_m = \sum^{ne} (\ddot{\mathbf{d}}^T \mathbf{m}_m \ddot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{c}_m \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{d}^T \mathbf{k}_m \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f}_m) \quad (15)$$

trong đó: \mathbf{m}_m , \mathbf{c}_m và \mathbf{k}_m lần lượt là các ma trận khối lượng, cản và độ cứng phần tử do ảnh hưởng của các lực quán tính, Coriolis và li tâm của khối lượng di động; \mathbf{f}_m là véc-tơ lực nút phần tử phụ thuộc vào thời gian do khối lượng di động gây ra.

Phương trình chuyển động rời rạc của dầm micro chịu khối lượng di động có dạng

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_m) \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}_m \dot{\mathbf{D}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_m) \mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (16)$$

trong đó: \mathbf{D} , $\dot{\mathbf{D}}$ và $\ddot{\mathbf{D}}$ lần lượt là các véc-tơ chuyển vị nút, vận tốc nút và gia tốc nút; \mathbf{M} ,

$\mathbf{M}_m, \mathbf{C}_m, \mathbf{K}, \mathbf{K}_m$ và \mathbf{F} lần lượt là các ma trận và véc-tơ tổng thể nhận được từ việc ghép các ma trận $\mathbf{m}_e, \mathbf{m}_m, \mathbf{c}_m, \mathbf{k}_e, \mathbf{k}_m$ và \mathbf{f}_m trên toàn phần tử. Phương trình (16) được giải bằng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark.

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Trong phần này sẽ khảo sát ảnh hưởng của tham số kích thước l lên hệ số động lực học D_d của dầm micro có biên tựa hai đầu và được làm từ nhôm. Các tính chất vật liệu và hình học của dầm như sau: $E = 70 \text{ GPa}$, $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$, $h = 10 \text{ }\mu\text{m}$ and $b = 1 \text{ }\mu\text{m}$, $L/h = 20$. Để thuận tiện, các thứ nguyên của hệ số động lực học D_d , tỷ số khối lượng r_m , tỷ số vận tốc α được xác định như sau:

$$D_d = \max\left(\frac{w(L/2, t)}{w_{st}}\right), r_m = \frac{m}{\rho AL}, \alpha = \frac{v}{V_1} \quad (17)$$

trong đó $w_{st} = mgL^3/(48EI)$ là độ võng tĩnh lớn nhất của dầm nhôm dưới tác dụng của tải trọng mg ; $V_1 = L\omega_1 / \pi$ với ω_1 là tần số riêng thứ nhất của dầm micro. Trong các tính toán dưới đây chỉ xét đến trường hợp $r_m = 0.5$.

Trước khi tính toán hệ số động lực học của dầm micro, đánh giá phương pháp đưa ra và sự hội tụ của phần tử dầm sẽ được thực hiện. Bảng 1 so sánh hệ số động lực học D_d của dầm ($l = 0$) chịu tải trọng di động dựa trên lý thuyết dầm bậc ba với các kết quả tính bởi Olsson [2] với lý thuyết dầm Euler-Bernoulli. Quan sát bảng 1 cho thấy, các kết quả nhận được rất gần với kết quả trong [1], điều này cho thấy phương pháp đưa ra trong bài báo đáng tin cậy.

Bảng 1. So sánh hệ số D_d của dầm

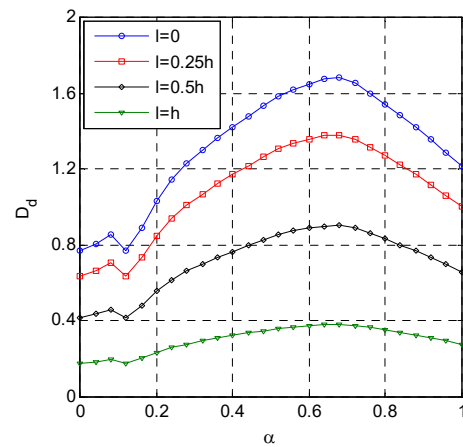
Nguồn	α			
	0.125	0.25	0.5	1
[2]	1.121	1.258	1.705	1.548
Bài báo	1.1300	1.2661	1.7162	1.5640

Sự hội tụ của phần tử dầm trong đánh giá hệ số động lực học D_d được đưa ra trong bảng 2 với $\alpha = 0.2$ và các giá trị khác nhau của tham số kích thước. Các kết quả trong bảng 2 cho thấy, sự hội tụ đạt được khi sử dụng chỉ với 10 phần tử, và đó là số phần tử được sử dụng để tính toán kết quả tiếp theo.

Bảng 2. Sự hội tụ của phần tử dầm micro

l	ne = 4	ne = 6	ne = 8	ne = 10
0.125h	0.8480	0.8470	0.8465	0.8465
0.75h	0.3035	0.3032	0.3031	0.3031

Hình 1 là sự biến đổi của của hệ số động lực học D_d theo tỷ số vận tốc α . Quan sát trên hình vẽ cho thấy sự thay đổi của tham số l có ảnh hưởng đáng kể đến D_d , tăng tham số kích thước dẫn đến giảm hệ số động lực học, đúng với mọi giá trị của tỷ số vận tốc. Điều này là do khi tăng giá trị l dẫn đến độ cứng của dầm tăng (quan sát từ phương trình (3) và (5)).



Hình 1. Sự biến đổi của hệ số động lực học của dầm micro theo tỷ số vận tốc α

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã nghiên cứu ảnh hưởng của tham số kích thước lên hệ số động lực học của dầm micro theo lý thuyết ứng suất cặp và lý thuyết dầm bậc ba. Các kết quả số nhận được cho thấy tham số kích thước có ảnh hưởng đáng kể lên hệ số động lực học. Các kết quả của bài báo có thể mở rộng cho việc nghiên cứu dầm micro làm từ các vật liệu có quy luật biến đổi theo các phương khác nhau.

5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F. Yang, A. C. M. Chong, D. C. C. Lam, P. Tong (2022), Couple stress based strain gradient theory for elasticity, International Journal of Solids and Structures, vol. 39, pp. 2731–2743.