

PHÂN TÍCH UỐN PHI TUYẾN CỦA KẾT CẤU DẦM TIMOSHENKO KÍCH THƯỚC MICRO BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Đặng Ngọc Duyên^{1,2}, Lê Công Ích³

¹Trường Đại học Thủy lợi

²Học viện Khoa học và Công nghệ, email: duyen.dndp@tlu.edu.vn

³Trường Đại học Kỹ thuật Lê Quý Đôn

1. GIỚI THIỆU

Kết cấu khung, dầm với kích thước micro được sử dụng rộng rãi trong các hệ thống vi cơ điện tử (Micro Electro Mechanical Systems, viết tắt là MEMS) [1]. Do kích thước nhỏ và phải chịu các tải trọng phức tạp khi làm việc, các kết cấu này thường có tỉ lệ độ võng so với kích thước của chúng là khá lớn, nên yếu tố phi tuyến hình học cần được đưa vào tính toán trong bài toán phân tích khung, dầm kích thước micro. Trong các nghiên cứu ban đầu, các tác giả đã sử dụng các lý thuyết dầm cổ điển để mô hình hóa kết cấu khung, dầm micro, tuy nhiên ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nhỏ đã bị bỏ qua [2, 3].

Bài toán uốn phi tuyến của dầm micro kể đến kích thước nhỏ chịu tải trọng phân bố và tải trọng tập trung được nghiên cứu ở đây. Lý thuyết dầm Timoshenko và phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) được sử dụng kết hợp với phương pháp lặp Newton-Raphson. Nhằm tránh hiện tượng “shear-locking”, các hàm nội suy là các đa thức bậc ba và bậc hai phụ thuộc lẫn nhau được sử dụng cho các chuyển vị ngang và góc quay của mặt cắt ngang tương ứng trong phần tử theo các giá trị tại nút phần tử [4]. Lý thuyết ứng suất cặp sửa đổi (Modified Couple Stress Theory-MCST) được sử dụng để tính tới hiệu ứng kích thước nhỏ [5].

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Xét một dầm micro đồng nhất có mặt cắt ngang hình chữ nhật, chiều dài L , chiều rộng b , và chiều dày h . Chọn hệ tọa độ (x,y,z) sao cho gốc O trùng với đầu dầm bên trái, trục Ox trùng với trục dầm, mặt phẳng Oxy nằm ngang và trùng với mặt phẳng trung hòa của dầm. Chuyển vị dọc trục $u(x,z)$ và chuyển vị ngang $w(x,z)$ tại một điểm có tọa độ (x,z) bất kỳ trên dầm được xác định như sau [4]:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x) - z\theta(x) \\ w(x,z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó, $u_0(x)$, và $w_0(x)$ là chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang của điểm trên mặt phẳng trung hòa của dầm và có tọa độ x ; $\theta(x)$ là góc xoay mặt cắt tại tọa độ x .

Dựa theo giả thiết phi tuyến von Kármán, biến dạng dọc trục và biến dạng cắt được suy ra từ công thức (1) như sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{0,x} - z\theta_{,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2 = \varepsilon_0 - z\theta_{,x} \\ \gamma_{xz} &= w_{0,x} - \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Dấu phẩy chỉ số dưới biểu thị đạo hàm riêng đối với biến theo sau, ví dụ $w_{0,x} = \partial w_0 / \partial x$.

Giả thiết quan hệ ứng suất-biến dạng là tuyến tính, ta có ứng suất dọc trục và ứng suất cắt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \psi G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

với E và $G = E/2(1+\nu)$ là mô đun đàn hồi và mô đun cắt; ν là hệ số Poisson của vật liệu dầm; ψ là hằng số, bằng 5/6 với dầm có mặt cắt chữ nhật.

Lý thuyết MCST được sử dụng kết hợp lý thuyết dầm Timoshenko để tính năng lượng biến dạng của dầm như sau [5]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + 2m_{xy} \chi_{xy}) dA dx \quad (4)$$

ở đây: $A = b \times h$ là diện tích mặt cắt ngang của dầm; m_{xy} là thành phần lệch của ten sơ ứng suất cặp và χ_{xy} tương ứng là thành phần của ten sơ đối xứng cong. Các biểu thức của chúng như sau:

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{4}(w_{0,xx} + \theta_{,x}), m_{xy} = 2G\ell^2 \chi_{xy} \quad (5)$$

với ℓ là tham số tỉ lệ chiều dài vật liệu [5].

Công của ngoại lực tác dụng lên dầm micro được cho bởi:

$$W_{ex} = \sum_{i=1}^{n_0} Q_i(x_i)w(x_i) + \int_0^L w(x)q(x)dx \quad (6)$$

ở đây: $q(x)$ là lực phân bố dọc theo chiều dài dầm; $Q_i(x_i)$ là lực tập trung tại điểm có tọa độ x_i ; n_0 là số lực tập trung tác dụng lên dầm.

Hệ phương trình cân bằng phi tuyến cho dầm micro có thể nhận được từ nguyên lý công ảo như sau:

$$\delta U - \delta W_{ex} = 0 \quad (7)$$

Công thức (7) đưa đến một hệ phương trình vi phân phi tuyến, với ba ẩn là u_0 , w_0 , và θ và rất khó để giải bằng phương pháp giải tích. Phương pháp PTHH, công cụ hiệu quả giải quyết các bài toán phi tuyến, sẽ được sử dụng.

Chia dầm thành NE phần tử, mỗi phần tử có hai nút. Véc tơ bậc tự do phần tử như sau:

$$\mathbf{d}_e = \{\mathbf{u}, \mathbf{\Delta}_e\}^T \quad (8)$$

ở đây: \mathbf{u} và $\mathbf{\Delta}_e$ là các véc tơ chuyển vị nút phần tử được xác định như sau:

$$\mathbf{u} = \{u_{01}, u_{02}\}^T, \mathbf{\Delta}_e = \{w_{01}, \theta_1, w_{02}, \theta_2\}^T \quad (9)$$

với u_{0i} , w_{0i} và θ_i là các chuyển vị dọc trục, chuyển vị ngang và góc xoay mặt cắt tại nút i của phần tử ($i = 1, 2$).

Sử dụng các hàm nội suy tuyến tính và các hàm nội suy của Kosmatka để nội suy cho u_0 , và w_0 cũng như θ theo các chuyển vị nút phần tử như trong [4]:

$$u_0 = \mathbf{N}\mathbf{u}, w_0 = \mathbf{H}_w\mathbf{\Delta}_e, \theta = \mathbf{H}_\theta\mathbf{\Delta}_e \quad (10)$$

ở đây \mathbf{N} , \mathbf{H}_w , và \mathbf{H}_θ là các hàm dạng đa thức tuyến tính, bậc ba và bậc hai như trong [4].

Đạo hàm u_0 , w_0 và θ trong công thức (10), thay vào (7) thu được hệ phương trình cân bằng phi tuyến của phần tử. Lắp ghép từng phần tử vào các bậc tự do tổng thể được hệ phương trình cân bằng phi tuyến tổng thể:

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \mathbf{F}_{ex}) = \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}_{in}(\mathbf{D}) = 0 \quad (11)$$

với \mathbf{D} , \mathbf{F}_{ex} , \mathbf{F}_{in} và \mathbf{R} là véc tơ tổng thể của các bậc tự do, ngoại lực, nội lực và lực dư.

Ma trận độ cứng tiếp tuyến tổng thể thu được bằng cách thay đổi gia số nội lực tổng thể:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{D}) = \frac{\partial \mathbf{F}_{in}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \quad (12)$$

Ma trận độ cứng tiếp tuyến tổng thể được sử dụng trong phương trình cân bằng phi tuyến như sau:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{D})\delta\mathbf{D} = \mathbf{R}(\mathbf{D}, \mathbf{F}_{ex}) = \mathbf{F}_{ex} - \mathbf{F}_{in}(\mathbf{D}) \quad (13)$$

Phương trình này được giải cho véc tơ tổng thể \mathbf{D} bằng phương pháp lặp Newton-Raphson. Chi tiết về phương pháp và cách tiến hành như trong [6]. Ở đây, một tiêu chuẩn hội tụ dựa trên chuẩn O-clit được sử dụng cho quá trình lặp như sau:

$$\|\mathbf{R}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{F}_{ex}\| \quad (14)$$

với ε là dung sai, được chọn bằng 10^{-4} .

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

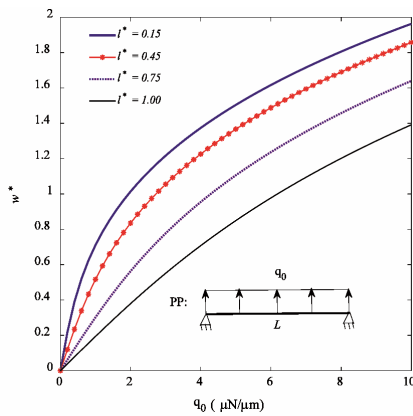
Dầm micro làm bằng vật liệu silicon với các hằng số vật liệu $E = 169\text{MPa}$, $\nu = 0.06$, các đoạn dầm có chiều dài $L = 250\mu\text{m}$, chiều rộng $b = 50\mu\text{m}$ và chiều dày $h = 3\mu\text{m}$. Để tiện cho thảo luận, các tham số không thứ nguyên sau đây được sử dụng:

$$\ell^* = \frac{\ell}{h}, w^* = 100 \frac{EI}{L^4} w_0^{\max} \quad (15)$$

Điều kiện biên của dầm micro xét ở đây: 1) Ngàm-Ngàm (CC): u_0, w_0, θ tại hai đầu dầm bằng không. 2) Ngàm-Bản lề (CP): u_0, w_0, θ tại đầu trái bằng không, u_0, w_0 tại đầu phải bằng không. 3) Bản lề-Bản lề (PP): u_0, w_0 tại hai đầu dầm bằng không.

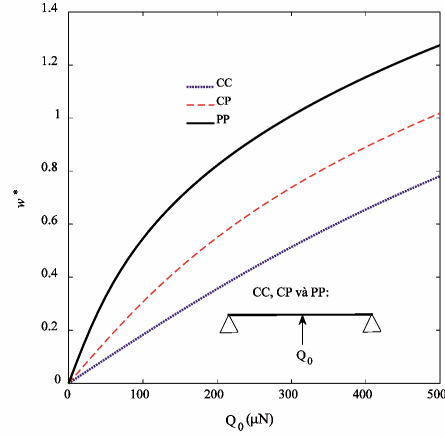
Trước khi khảo sát số, mô hình phần tử dầm ở đây được dùng để tính và so sánh với kết quả trong tài liệu tham khảo [7]. Sai số thu được nhỏ hơn 0.5%. Số phần tử dầm cần thiết để kết quả hội tụ là bốn. Do vậy, mô hình phần tử dầm thiết lập ở đây là tin cậy và bốn phần tử/dầm được sử dụng trong tất cả các khảo sát dưới đây.

Các đường cong $w^* - q_0$ của dầm micro PP chịu tải phân bố đều trong Hình 1 thể hiện đối với các giá trị khác nhau của tham số l^* . Có thể thấy, bất kể mức tải, độ võng w^* dầm đều giảm mạnh theo sự gia tăng của l^* . Điều này là do hiệu ứng kích thước (đã được tính đến ở đây) làm tăng năng lượng biến dạng, độ cứng uốn và cắt của các dầm micro, có thể thấy rõ từ công thức (4). Do đó, hiệu ứng kích thước nhỏ có ảnh hưởng quan trọng đến việc dự đoán đáp ứng phi tuyến của các dầm micro.



Hình 1. Đường cong $w^* - q_0$ của dầm micro hai đầu bản lề với các giá trị l^*

Để thể hiện tác động của các điều kiện biên lên đáp ứng phi tuyến của các dầm micro dưới tải trọng cơ học, Hình 2 thể hiện các đường cong $w^* - Q_0$ của các dầm CC, CP và PP cho tải trọng tập trung. Có thể thấy từ Hình 2 rằng, các điều kiện biên đóng vai trò quan trọng lên đáp ứng phi tuyến của dầm micro. Không chỉ biên độ w^* , mà cả mức độ phi tuyến cũng bị chi phối bởi các điều kiện biên. Ở một tải trọng nhất định, cả độ võng w^* và mức độ phi tuyến của dầm PP đều lớn nhất, trong khi dầm CC thì nhỏ nhất.



Hình 2. Đường cong $w^* - Q_0$ của dầm micro dưới lực tác dụng tập trung và $l^* = 0.35$

4. KẾT LUẬN

Bài toán phân tích uốn phi tuyến của dầm Timoshenko kích thước micro chịu tải trọng phân bố và tải trọng tập trung được nghiên cứu ở đây bằng phương pháp PTHH kết hợp với phương pháp lặp Newton-Raphson. Các hàm nội suy do Kosmatka thiết lập được sử dụng cho các chuyển vị ngang và góc quay của mặt cắt ngang để tránh hiện tượng “shear-locking”. Lý thuyết MCST được sử dụng để tính tới hiệu ứng kích thước nhỏ. Các kết quả chỉ ra rằng, tham số l^* và điều kiện biên có ảnh hưởng rất lớn tới kết quả tính toán.

5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. I. Younis. (2011). MEMS linear and nonlinear statics and dynamics, Vol. 20. Springer Science & Business Media.
- [2] B. Choi and E. Lovell. (1997). Improved analysis of microbeams under mechanical and electrostatic loads. J. Micromech. Microeng., 7, (1), 1-24.
- [3] D. K. Nguyen, B. Gan, and T. H. Trinh. (2014). Geometrically nonlinear analysis of planar beam and frame structures made of functionally graded material. Struct. Eng. Mech., 49, (6), 727-743.
- [4] J.B. Kosmatka. (1995). An improve two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams, Comput. Struct. 57, 141-149.