

# ĐỘNG LỰC HỌC NGƯỢC ROBOT SONG SONG DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP GỘP CÁC NHÂN TỬ LAGRANGE

Lương Bá Trường

Trường Đại học Thủy lợi, email: truonglb@tlu.edu.vn

## 1. GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây robot công nghiệp nói chung và robot song song nói riêng được quan tâm nghiên cứu vì có nhiều ứng dụng trong tự động hóa, cơ điện tử và kỹ thuật cơ khí. Nhiều cuốn sách có giá trị của các nhà khoa học nước ngoài [1-2] và trong nước [3] viết về động lực học robot song song đã được xuất bản.

Trên các tạp chí khoa học, bài toán động lực học thuận robot song song được đề cập đến tương đối ít, nhưng bài toán động lực học ngược robot song song còn được quan tâm nghiên cứu nhiều ở nước ngoài cũng như ở trong nước.

Trong báo cáo này tác giả trình bày một thuật toán tương đối thuận tiện để giải bài toán động lực học ngược robot song song nhằm giúp các kỹ sư công tác ở các doanh nghiệp và sinh viên các trường đại học có một công cụ dễ dàng tiếp cận với bài toán có nhiều ý nghĩa thực tế này.

## 2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Mô hình robot song song phẳng 3RPR được cho như trên Hình 1. Như đã biết phương trình vi phân - đại số mô tả chuyển động của các hệ vật có cấu trúc mạch vòng có dạng[3]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \mathbf{J}_f^T(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_r \quad (1)$$

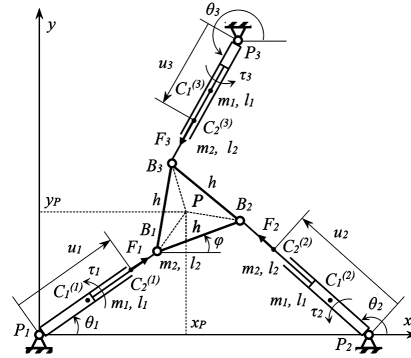
$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

trong đó  $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$  được gọi là các phương trình liên kết.

Trong phương trình (1) và (2) ta sử dụng các kí hiệu:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^r, \mathbf{J}_f = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{r \times n_s}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}, \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_s}, \mathbf{Q}_s \in \mathbb{R}^{n_s}$$



Trong bài toán động lực học ngược người ta cho biết phương trình quy luật chuyển động của khâu thao tác  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ . Ta cần phải thiết lập quan hệ chuyển động của khâu thao tác  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  và các tọa độ khớp  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s}$ .

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{s}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s} \quad (3)$$

Các phương trình (3) được gọi là các phương trình liên kết chương trình.

Bài toán động lực học ngược được đặt ra như sau: Cho biết phương trình chuyển động dạng vi phân - đại số (1), (2) và các phương trình liên kết chương trình (3). Xác định momen/lực của các khâu dẫn động  $\boldsymbol{\tau}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$  cần thiết để tạo ra chuyển động mong muốn  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  của khâu thao tác.

*Phương pháp gộp các nhân tử Lagrange và momen khâu dẫn*

Trong trường hợp này ta sử dụng các tọa độ dư mở rộng để xác định vị trí của robot. Sử dụng phương trình (1) ta có thể tính các nhân tử Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  và các momen/lực cần thiết của các khâu dẫn  $\boldsymbol{\tau}_a$ . Trước hết ta viết lại phương trình (1) dưới dạng như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) = \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_f^T(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda} \quad (4)$$

$$\text{trong đó ta đưa vào kí hiệu: } \mathbf{Q}_r = \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

Để biến đổi tiếp phương trình (4) ta đưa vào các kí hiệu như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ -\mathbf{J}_f \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = [\mathbf{Z}^T \quad -\mathbf{J}_f^T], \mathbf{f}_\mu = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Từ phương trình (4) ta suy ra:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{f}_\mu = \mathbf{M}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) \quad (7)$$

Khi  $\det(\mathbf{A}^T) \neq 0$ , từ phương trình (7) ta có phương trình các định momen/lực khâu dẫn:

$$\mathbf{f}_\mu = (\mathbf{A}^T)^{-1} [\mathbf{M}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s})] \quad (8)$$

Từ bài toán động học ngược, thế các biểu thức  $\mathbf{s}(t), \dot{\mathbf{s}}(t), \ddot{\mathbf{s}}(t)$  vào phương trình (8) ta xác định được cả  $\boldsymbol{\tau}$  và  $\boldsymbol{\lambda}$ .

Các bước giải bài toán động lực học ngược theo thuật toán trên như sau:

*Bước 1:* Giải bài toán động học ngược. Cho biết  $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$ , tính  $\mathbf{s}(t), \dot{\mathbf{s}}(t), \ddot{\mathbf{s}}(t)$  tại từng thời điểm trong khoảng thời gian từ  $t=0$  đến  $t=T$ .

*Bước 2:* Từ các ma trận của phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của robot song song ta tính được các ma trận  $\mathbf{M}(\mathbf{s}), \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}), \mathbf{J}_f(\mathbf{s}), \mathbf{g}(\mathbf{s})$  tại các thời điểm từ  $t=0$  đến  $t=T$ .

*Bước 3:* Tính các momen/lực của các khâu dẫn và các nhân tử Lagrange từ phương trình đại số tuyến tính (8).

### 3. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN

Sử dụng phương pháp tách cấu trúc ta thiết lập được phương trình vi phân chuyển động của robot dưới dạng (4), chú ý trong trường hợp của bài toán này ta dẫn động bằng  $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]$  nên  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ , trong đó:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ u_1 \\ \theta_2 \\ u_2 \\ \theta_3 \\ u_3 \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix}; \ddot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{bmatrix}; \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^9$$

$$m_{11} = \left( \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 u_1^2 + I_1 + I_2 \right); m_{22} = m_2;$$

$$m_{33} = \left( \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 u_2^2 + I_1 + I_2 \right); m_{44} = m_2;$$

$$m_{55} = \left( \frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 u_3^2 + I_1 + I_2 \right); m_{66} = m_2;$$

$$m_{77} = m; m_{88} = m; m_{99} = I$$

Các phần tử còn lại của ma trận  $m_{ij} = 0$

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^9$$

$$c_{11} = 2m_2 u_1 \dot{u}_1; c_{21} = -m_2 u_1 \dot{\theta}_1; c_{33} = 2m_2 u_2 \dot{u}_2;$$

$$c_{43} = -m_2 u_2 \dot{\theta}_2; c_{55} = 2m_2 u_3 \dot{u}_3; c_{65} = -m_2 u_3 \dot{\theta}_3;$$

Các phần tử còn lại của ma trận  $c_{ij} = 0$

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$$

$$g_{11} = \left( \frac{1}{2} m_1 l_1 + m_2 u_1 \right) g \cos \theta_1; g_{21} = m_2 g \sin \theta_1$$

$$g_{31} = \left( \frac{1}{2} m_1 l_1 + m_2 u_2 \right) g \cos \theta_2; g_{41} = m_2 g \sin \theta_2$$

$$g_{51} = \left( \frac{1}{2} m_1 l_1 + m_2 u_3 \right) g \cos \theta_3; g_{61} = m_2 g \sin \theta_3$$

$$g_{71} = 0, g_{81} = mg; g_{91} = 0$$

$$\mathbf{J}_f^T(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$$

$$j_{11} = -\left( u_1 + \frac{l_1}{2} \right) \sin \theta_1; j_{12} = \left( u_1 + \frac{l_1}{2} \right) \cos \theta_1; j_{21} = \cos \theta_1;$$

$$j_{22} = \sin \theta_1; j_{33} = -\left( u_2 + \frac{l_2}{2} \right) \sin \theta_2; j_{34} = \left( u_2 + \frac{l_2}{2} \right) \cos \theta_2;$$

$$j_{44} = \cos \theta_2; j_{45} = \sin \theta_2; j_{55} = -\left( u_3 + \frac{l_3}{2} \right) \sin \theta_3;$$

$$j_{56} = \left( u_3 + \frac{l_3}{2} \right) \cos \theta_3; j_{65} = \cos \theta_3; j_{66} = \sin \theta_3;$$

$$j_{91} = -\frac{\sqrt{3}}{3} h \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{6} \right); j_{92} = \frac{\sqrt{3}}{3} h \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{6} \right);$$

$$j_{93} = \frac{\sqrt{3}}{3} h \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right); j_{94} = -\frac{\sqrt{3}}{3} h \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right);$$

$$j_{95} = \frac{\sqrt{3}}{3} hc \cos \varphi; j_{96} = \frac{\sqrt{3}}{3} h \sin \varphi;$$

$$j_{71} = j_{82} = j_{73} = j_{84} = j_{75} = j_{86} = 1$$

Các phần tử còn lại của ma trận  $j_{ij} = 0$

Phương trình liên kết của robot:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(u_1 + \frac{l_1}{2}\right) \cos \theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} h \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - x_p = 0 \\ \left(u_1 + \frac{l_1}{2}\right) \sin \theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} h \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - y_p = 0 \\ c + \left(u_2 + \frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} h \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - x_p = 0 \\ \left(u_2 + \frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} h \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - y_p = 0 \\ \frac{c}{2} + \left(u_3 + \frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_3 + \frac{\sqrt{3}}{3} h \sin \varphi - x_p = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} c + \left(u_3 + \frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_3 - \frac{\sqrt{3}}{3} h \cos \varphi - y_p = 0 \end{bmatrix}$$

Sử dụng phần mềm Matlab với các số liệu:

$$l_1 = 0,2[m]; l_2 = 0,2[m]; h = 0,3\sqrt{3}[m]; c = 0,3\sqrt{3}[m];$$

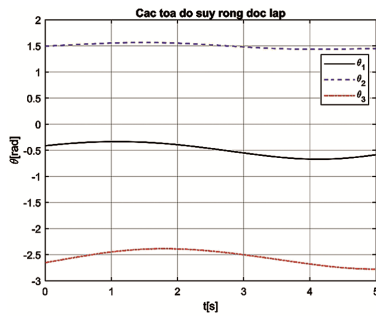
$$x_p^{(0)} = 0,15\sqrt{3}; y_p^{(0)} = 0,15; R = 0,025[m], \varphi_0 = \frac{\pi}{12}[rad];$$

$$m_1 = 3[kg]; m_2 = 1,5[kg]; m = 5[kg]; I_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 [kgm^2];$$

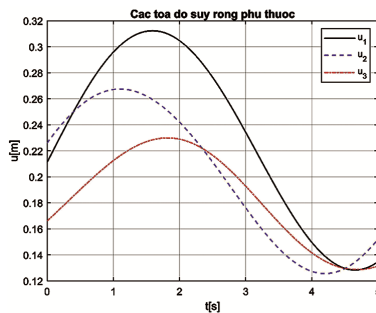
$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 [kgm^2]; I = \frac{1}{8} m h^2 [kgm^2]$$

Ta thu được một số kết quả sau:

Trên Hình 2 và Hình 3 là đồ thị các tọa độ suy rộng độc lập và phụ thuộc của robot.

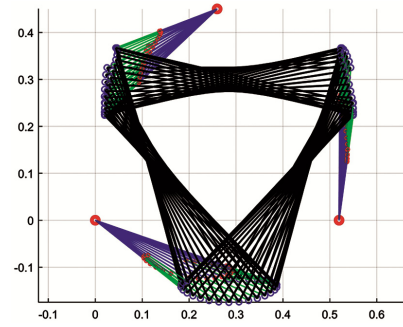


Hình 2. Đồ thị các tọa độ suy rộng độc lập  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

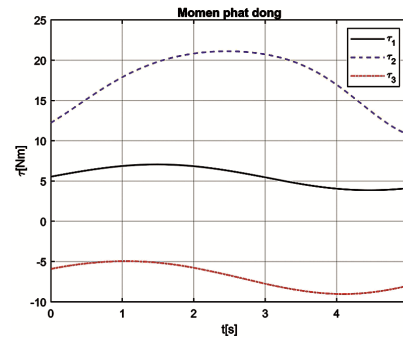


Hình 3. Đồ thị các tọa độ suy rộng phụ thuộc  $u_1, u_2, u_3$

Trên Hình 4 là cấu hình của robot được vẽ bằng Matlab và Hình 5 là đồ thị các momen dẫn động tính toán được.



Hình 4. Cấu hình của robot



Hình 5. Đồ thị các momen dẫn động

#### 4. KẾT LUẬN

Báo cáo trình bày một thuật toán khá đơn giản và dễ dàng lập trình trên các phần mềm tính toán số để giải quyết bài toán động lực học ngược của robot song song, bài toán động lực học ngược có ý nghĩa thực tế rất quan trọng, là tiền đề cho bài toán điều khiển robot. Tuy nhiên phương pháp trên còn một hạn chế đó là chưa khảo sát robot tại các vị trí kì dị.

#### 5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] J.P. Merlet (2006), Parallel Robots. Springer-Verlag, Berlin.
- [2] S. Staicu (2019), Dynamics of Parallel Robots, Springer Nature Switzerland.
- [3] Nguyễn Văn Khang: Động lực học hệ nhiều vật (in lần thứ hai). NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2017.