SỰ TỒN TẠI TOÀN CỤC CHO HỆ VI PHÂN KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT

Nguyễn Văn Đắc
Trường Đại học Thủy lợi, email: nvdac@tlu.edu.vn

1. GIỚI THIỆU CHUNG

Hệ vi phân không địa phương là một mô hình toán dùng để mô tả quá trình truyền nhiệt trong các vật liệu có nhớ; quá trình thuần nhất hóa dòng một pha trong môi trường xốp (xem [4] và các tài liệu trích dẫn). Việc nghiên cứu về hệ vi phân không địa phương đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học, như đã đề cập trong [2]. Trong tài liệu [2], tác giả đã phân tích chi tiết về tính trừu tượng, ý nghĩa của việc nghiên cứu và các hướng nghiên cứu cho bài toán sau: Cho trước $T > 0$, ta xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{dt}\left(\kappa u + k * [u - u(0)]\right) \\ \qquad\qquad + Au = f\left(t, u(t)\right), t \in (0,T] \quad (1) \\ u(0) = u_0, \qquad (2) \end{cases}$$

với u lấy giá trị trong không gian Hilbert tách được H, $\kappa \geq 0, k \in L^1_{loc}(¡^+)$, A là toán tử tuyến tính trên H và $f : (0,T] \times H \to H$ là hàm phi tuyến, dữ kiện đầu $u_0 \in H$.

Lớp bài toán này với phần phi tuyến không phụ thuộc vào thời gian, đã được nghiên cứu trong [5], ở đó tác giả nghiên cứu tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn. Trong bài báo này, tôi trình bày kết quả nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm nhẹ toàn cục cho hệ (1)-(2) trong hai trường hợp:

- Phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz.
- Phần phi tuyến có tăng trưởng dưới tuyến tính.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Sử dụng lí thuyết phương trình tích phân Volterra, ước lượng tiên nghiệm, nguyên lí ánh xạ co và Định lí điểm bất động Shauder.

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

3.1. Kiến thức chuẩn bị

Để nghiên cứu bài toán (1)-(2), chúng tôi cần các giả thiết sau đây về hàm k và toán tử A:

(K) *Hàm $k \in L^1_{loc}(¡^+)$ không âm và không tăng, hơn nữa tồn tại một hàm $l \in L^1_{loc}(¡^+)$ sao cho $\kappa l + l * k = 1$ trên $(0,\infty)$.*

(A) *Toán tử A là toán tử tuyến tính xác định dương, tự liên hợp, xác định trù mật với giải thức compact.*

Cho $\mu > 0$, $l \in L^1_{loc}(¡^+)$ là một hàm liên tục trên $(0,\infty)$, xét các phương trình Volterra

$$s(t) + \mu\left(l * s\right)(t) = 1 \qquad (3)$$

$$r(t) + \mu\left(l * r\right)(t) = l(t) \qquad (4)$$

Với giả thiết **(K)**, Clément và Nohel (xem [1]) đã chỉ ra rằng hệ (3)-(4) có nghiệm duy nhất nghiệm $s(\cdot,\mu)$ và $r(\cdot,\mu)$, các nghiệm này đều có tính dương.

3.2. Công thức nghiệm nhẹ

Nhằm đưa ra công thức nghiệm nhẹ của bài toán, ta cần giả thiết sau về toán tử A:

(A) *Toán tử A là toán tử tuyến tính xác định dương, tự liên hợp, xác định trù mật với giải thức compact.*

Khi đó, ta xét cơ sở của H gồm các hàm riêng trực chuẩn $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ của toán tử A và

$$Av = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n e_n \text{, trong đó } Ae_n = \lambda_n e_n, \lambda_n > 0$$

và $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \mathrm{L} \le \lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$.

Dựa vào các hàm $s(\cdot,\mu)$, $r(\cdot,\mu)$ và các giá trị riêng của A, ta định nghĩa hai toán tử

$$S(t)v = \sum_{n=1}^{\infty} s(t,\lambda_n) v_n e_n, t \ge 0, v \in H,$$

$$R(t)v = \sum_{n=1}^{\infty} r(t,\lambda_n) v_n e_n, t > 0, v \in H.$$

Các toán tử này là tuyến tính. Một số tính chất quan trọng của hai toán tử này được trình bày trong Mệnh đề 2.3 ở [4]. Bằng phương pháp xấp xỉ bởi dãy toán tử compact, ta chứng minh được Bổ đề sau (xem [5]).

Bổ đề Q. Giả sử các giả thiết (A) và (K) thỏa mãn. Khi đó toán tử

$$Q : C([0,T];H) \to C([0,T];H)$$

xác định bởi $Q(g)(t) = R * g(t)$, là toán tử compact.

Định nghĩa.([2]) Hàm $u \in C([0,T],H)$ được gọi là nghiệm nhẹ của (1)-(2) trên $[0,T]$ nếu

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t R(t-\tau) f(\tau,u(\tau)) d\tau.$$

3.3. Sự tồn tại toàn cục của nghiệm nhẹ

Để thu được sự tồn tại và duy nhất nghiệm trên tập compact, ta đặt các giả thiết cho phần phi tuyến:

(F1) *Hàm liên tục* $f : [0;T] \times H \to H$ *thỏa*

$$\|f(t,v_1) - f(t,v_2)\| \le a(t)\|v_1 - v_2\|, \forall t \in [0,T],$$

$\forall v_1, v_2 \in H$, *trong đó* $a \in L^1_{loc}(¡^+)$ *là hàm cho trước và không âm sao cho*

$$\lim_{\eta\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) d\tau = 0 \ (*).$$

Chú ý. Nếu $r(t-\cdot,\lambda_1)a(\cdot) \in L^1_{loc}(¡^+)$, thì (*) thỏa mãn (xem Bổ đề 2.7 trong [3]).

Bằng nguyên lí ánh xạ co, ta có kết quả sau.

Định lí 1. Giả sử các giả thiết (K), (A) và (F1) được thỏa mãn thì bài toán (1)-(2) có nghiệm duy nhất toàn cục.

Chứng minh: Từ giả thiết (*), ta có thể chọn số $\eta > 0$ sao cho

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) d\tau < 1.$$

Đặt $\|v\|_\eta = \sup_{[0,T]} e^{-\eta t} \|v(t)\|$ với $v \in C([0,T];H)$, ta thu được chuẩn tương đương với chuẩn sup trên không gian $C([0,T];H)$.

Xét ánh xạ như sau:

$$\mathrm{F}(u)(t) := S(t)u_0 + \int_0^t R(t-\tau) f(\tau,u(\tau)) d\tau$$

trên $C([0,T],H)$.

Mỗi điểm bất động của ánh xạ chính là nghiệm của bài toán. Để chứng minh bài toán có nghiệm duy nhất, ta sẽ chỉ ra nó là ánh xạ co. Thật vậy, với mọi $u_1, u_2 \in C([0,T],H)$ ta có $\|\mathrm{F}(u_1)(t) - \mathrm{F}(u_2)(t)\|$

$$\le \int_0^t r(t-\tau,\lambda_1) \|f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_1(\tau))\| d\tau$$

$$\le \int_0^t r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| d\tau$$

$$\le \int_0^t r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) \sup_{\theta\in[0,\tau]} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| d\tau$$

$$\le \int_0^t e^{\eta\tau} r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) \sup_{\theta\in[0,\tau]} e^{-\eta\theta} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| d\tau$$

$$\le \|u_1 - u_2\|_\eta \int_0^t e^{\eta\tau} r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) d\tau.$$

Từ đó suy ra:

$$\sup_{t\in[0,T]} e^{-\eta t} \|\mathrm{F}(u_1)(t) - \mathrm{F}(u_2)(t)\|$$

$$\le \|u_1 - u_2\|_\eta \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) d\tau.$$

Tức là:

$$\|\mathrm{F}(u_1) - \mathrm{F}(u_2)\|_\eta \le \rho \|u_1 - u_2\|_\eta,$$

với: $\rho = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} r(t-\tau,\lambda_1) a(\tau) d\tau < 1$. Ta được F là ánh xạ co trên $C([0,T];H)$. Vậy bài toán có duy nhất nghiệm trên $[0,T]$.

Tiếp theo, xét phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính như sau:

(F2) *Hàm liên tục* $f : [0;T] \times H \to H$ *thỏa*

$$\|f(t,v)\| \le b(t)\|v_2\| + c(t), \forall t \in [0,T], \forall v \in H$$

trong đó $b, c \in L^1_{loc}(¡^+)$ *là các hàm cho trước và không âm.*

Ta thu được sự tồn tại nghiệm toàn cục, tuy vậy, tính duy nhất nghiệm không còn đảm bảo. Chúng tôi sử dụng Định lí điểm bất động Shauder để thu được kết quả như mong muốn. Nội dung chính được phát biểu trong định lí sau đây.

Định lí 2. Giả sử các giả thiết (K), (A) và (F_2) được thỏa mãn thì bài toán (1)-(2) có nghiệm toàn cục.

Chứng minh: Ta xét ánh xạ F như trong Định lí 1. Với $u \in C([0,T];H)$ và $t \in [0,T]$ ta có:

$$\|\mathrm{F}(u)(t)\| \le \|S(t)u_0\| + \int_0^t \|R(t-\tau)f(\tau,u(\tau))\|d\tau$$

$$\le s(t,\lambda_1)\|u_0\| + \int_0^t r(t-\tau,\lambda_1)\|f(\tau,u(\tau))\|d\tau$$

$$\le \|u_0\| + \int_0^t r(t-\tau,\lambda_1)\left[b(\tau)\|u(\tau)\| + c(\tau)\right]d\tau$$

$$\le \|u_0\| + \sup_{t\in[0,T]}\left(r(\cdot,\lambda_1)*c\right)(t) +$$

$$+\int_0^t r(t-\tau,\lambda_1)b(\tau)\sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)\|d\tau$$

Hàm $g(\tau) = \sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)\|$ là một hàm không giảm và $r(t-\cdot,\lambda_1)b(\cdot)$ nhận giá trị không âm, nên tích phân cuối là một hàm không giảm. Do đó

$$\sup_{\theta\in[0,t]}\|\mathrm{F}(u)(\theta)\| \le \|u_0\| + \sup_{t\in[0,T]}\left(r(\cdot,\lambda_1)*c\right)(t) +$$

$$+\int_0^t r(t-\tau,\lambda_1)b(\tau)\sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)\|d\tau.$$

Ta kí hiệu

$$\Omega = \{u \in C([0,T];H) \mid \sup_{\theta\in[0,t]}\|u(\theta)\| \le \psi(t), t\in[0,T]\}$$

trong đó ψ là nghiệm duy nhất của

$$\psi(t) = \|u_0\| + \sup_{t\in[0,T]}\left(r(\cdot,\lambda_1)*c\right)(t) +$$

$$+\int_0^t r(t-\tau,\lambda_1)b(\tau)\psi(\tau)d\tau.$$

Khi đó Ω là một tập lồi, đóng và bị chặn.

Ta sẽ chứng minh toán tử nghiệm F giữ bất biến tập Ω. Thật vậy, với $u\in\Omega$ thì $\sup_{\theta\in[0,\tau]}\|u(\theta)\| \le \psi(\tau), \tau\in[0,t]$ nên

$$\sup_{\theta\in[0,t]}\|\mathrm{F}(u)(\theta)\| \le \|u_0\| + \sup_{t\in[0,T]}\left(r(\cdot,\lambda_1)*c\right)(t) +$$

$$+\int_0^t r(t-\tau,\lambda_1)b(\tau)\psi(\tau)d\tau = \psi(t)$$

nên $\mathrm{F}(u)\in\Omega$, tức là $\mathrm{F}(\Omega)\subset\Omega$.

Như vậy, ta xét toán tử $\mathrm{F}::\Omega\to\Omega$. Do f là hàm liên tục nên ánh xạ này là liên tục. Mặt khác, từ $\mathrm{F}(u) = S(\cdot)u_0 + Q\circ N_f(u)$, với $N_f(u)(t) = f(t,u(t)), t\in[0,T]$ ta thấy F: là toán tử compact vì Q là compact (**Bổ đề Q**). Theo nguyên lí điểm bất động Shauder, ta được điều phải chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm nhẹ toàn cục cho hệ (1)-(2) với các giả thiết phù hợp đặt cho toán tử và phần phi tuyến. Cụ thể, sử dụng nguyên lí ánh xạ co ta thu được sự tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục khi phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện (**F_1**). Khi phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng dưới tuyến tính ta thu được sự tồn tại nghiệm toàn cục bằng cách dùng Định lí điểm bất động Shauder.

5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ph. Clément, J. A. Nohel (1981), Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equation with completely positive kernerls, SIAM J.Math. Anal., 514-525.

[2] N.V. Dac (2020), Về phương trình vi phân không địa phương trên không gian Hilbert, *Tuyển tập hội nghị khoa học thường niên Đại học Thủy lợi*. 45-47.

[3] K. Ezzinbi, S.Ghnimi, M.-A. Taoudi, (2019) Existence results for some nonlocal partial integro differential equations without compactness or equicontinuity, *J. Fixed Point Theory Appl*. 21, no. 2.

[4] T.D. Ke, N.N. Thang, L.T.P. Thuy, (2020), Regularity and stability analysis for a class of semilinear nonlocal differential equations in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 483, No.2, 123655.

[5] N.N. Thang, T.D. Ke, N.V. Dac (Preprint), Stability analysis for nonlocal evolution equations involving infinite delays, Submitted.